वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

लघुपुस्तिका

1. गणित म्हणजे 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
2. Sin 90 = 1 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
3. त्रिकोणमिती आणि आलेख	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
4. हत्तीचा उंदीर	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
5. साक्षर भूमिती	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00

आगामी

⁘ काही पत्रिका आणि काही लघुपत्रिका

⁘ काही कृतिपत्रिका

लघुपुस्तिका क्र. 05

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई-412 803.

दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com

साक्षर भूमिती

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

वाई तालुका गणित अध्यापक, मंडळ

वाई

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर राईलकर पुणे

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरुण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री. दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
16 जानेवारी 2011

लेखक
प्रा. मनोहर राईलकर
56, मृण्मयी जेधेनगर,
बिबवेवाडी, पुणे-37
दूरध्वनी: (020) 24420566

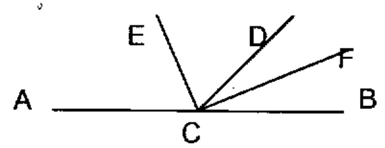
मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162) 284430

मूल्य रुपये - **20/-**

साक्षर भूमिती

पुस्तकाचं नाव वाचून तुम्ही चमकला असाल. आणि 'आजवर आम्ही शिकलो ती भूमिती काय निरक्षर होती का?' असंही मनात आलं असेल. पण साक्षर भूमिती याचा इथं एक निराळा अर्थ माझ्या मनात आहे. कोनांच्या मापांकरता, रेषाखंडांकरता लहान अक्षरं वापरण्यानं आपलं लेखनाचं काम किती हलकं होतं, इतकंच दाखवून देणं हा ह्या पुस्तकाचा उद्देश आहे.

उदा. 1: रेषीय जोडीच्या कोनांचे दुभाजक परस्परांना लंब असतात, हे प्रमेय पाहू. मुद्दाम अगदी सोपं उदा. घेतलं आहे. पहा.

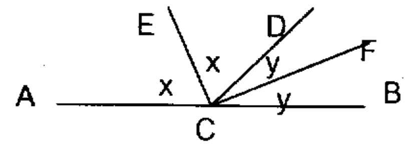


AB रेषेवर CD ही एक रेषा आहे. तिच्यामुळं ACD आणि DCB असे दोन कोन झाले आहेत. CE आणि CF हे त्यांचे दुभाजक आहेत. तर CE आणि CF परस्परांना लंब असतात, असं दाखवायचं आहे.

हे सिद्ध करण्याची आमच्यावेळची रीत काय होती? पहा. $<ACD$ आणि $<DCB$ यांची रेषीय जोडी असल्यामुळं

$$m<ACD+m<DCB=180$$

CE आणि CF हे दुभाजक असल्यामुळं$m<ECD=m<ACD/2$, $m<DCF=m<DCB/2$. म्हणून $m<ECD+m<DCF=180/2=90$
याप्रमाणं प्रमेय सिद्ध. आता आपण अक्षरं घेऊ. आणि पाहू काय होतं ते.



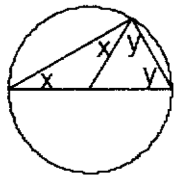
आकृतीप्रमाणं नावं द्या. मग, यावरून $<ACD$ आणि $<DCB$ यांची रेषीय जोडी असल्यामुळं आपण पुढील समीकरणं लागलीच मांडू शकतो.

$$2x+2y=180, \text{ म्हणून } x+y=90$$

म्हणून, CE आणि CF परस्परांना लंब. याप्रमाणं प्रमेय सिद्ध.

कदाचित ह्या उदाहरणांकरता, आता तुम्ही अशा रीती वापरीतही असाल. पण शक्यतो ही अक्षरांचीच युक्ती वापरायची, असं करता की नाही हे मात्र, मला माहीत नाही. ही युक्ती वापरल्यानं काम कसं हलकं होतं?

उदा. 2: अर्धवर्तुळातला कोन काटकोन असतो, हा गुणधर्मही याचप्रमाणं नावं देऊन सिद्ध करता येईल. आकृती पहा.



तीवरून व त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180 असते हे लक्षात घेतलं की $x+x+y+y=180$, $x+y=90$. इथंही आपलं लिखाणकाम कमी झालेलं दिसून आलं? आणि आपण तर्काला कुठंही फाटा दिलेला नाही.

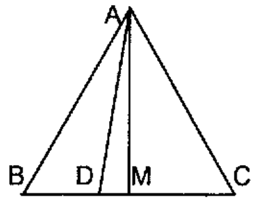
यावेळी माझा मुख्य मुद्दा समजावून सांगायचा होता म्हणून मी साधी सोपी उदाहरणं घेतली आहेत. आणि आजकाल ही उदाहरणं मी दाखवलेल्याच पद्धतीनं सोडवली जातात, हेही मला माहीत आहे. पण मला अशी कित्येक उदाहरणं माहीत आहेत की नावं घेतली नाहीत, तर उदाहरण कसं सोडवायचं ते कळतच नाही. आणि नावं वापरली की लागलीच उत्तर किंवा उत्तराकडे जाण्याचा मार्ग दिसू लागतो. उदाहरणांच्या मदतीनं हा मुद्दा स्पष्ट करणं हाच पुस्तकाचा उद्देश आहे.

साक्षर ह्या शब्दाचे व्यवहारात जसे दोन अर्थ असतात, तसेच इथंही मला अभिप्रेत आहेत. व्यवहारातील दोन अर्थांपैकी एक म्हणजे अक्षरं कळणं आणि दुसरा म्हणजे आकडे किंवा संख्या कळणं अगदी स्पष्ट बोलायचं तर, अंकगणित येणं. साक्षर भूमितीत अक्षरंही वापरावीत आणि योग्य अशा संख्याही वापराव्यात असंच मला म्हणायचं आहे. म्हणजे, इथंही असे दोन्ही अर्थ अपेक्षित आहेत. जसजशी उदाहरणं घेऊ तसतसा माझ्या म्हणण्याचा उलगडा होत जाईल.

आता हे उदाहरण पहा -

उदा. 3: समभुज त्रिकोण ABC च्या BC बाजूचा D हा B च्या जवळचा त्रिभाजन बिंदू आहे. तर $9AD^2=7AB^2$ दाखवा.

सिद्धता: M हा BC चा मध्यबिंदू घ्या. आणि त्रिकोणाची बाजू 6x आहे असं समजा. (बाजू 6x का घेतली हे लवकरच समजेल. पण6x घेण्यातला मुख्य उद्देश अपूर्णांक व भागाकार टाळणं हा आहे. त्यामुळंही लिखाण हलकंच होतं.) त्रिकोण ABM चे कोन 30-60-90 असे असल्याने $AM^2=3BM^2 =27x^2$ येईल, कारण, $DM=x$, $BM=3x$. हेही सरळ आहे.



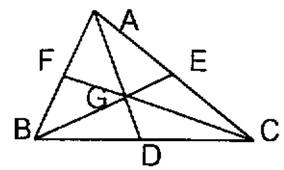
आता, पायथागोरसचं प्रमेय त्रिकोण ADM ला लावू. मग, $AD^2 = AM^2 + DM^2 = 27x^2+x^2 = 28x^2$ मग, $9AD^2 = 9.28x^2=7.36x^2 = 7AB^2$ हेही सरळ येतं. आणखी एक. मी 6x अशी AB ची किंमत न घालता डाव्याबाजूला 9 नं गुणलं. त्यामुळं मी भागाकार टाळले. करून पहा. म्हणजे माझ्या म्हणण्यातलं तथ्य कळेल.

तुमच्या लक्षात आलं का, जर आपण अक्षरं (x) आणि संख्या (6) घेतल्या नसत्या तर ह्यातली आकडेमोड फारच गुंतागुंतीची झाली असती? आणि महत्त्वाची गोष्ट आपण तर्क कुठंही सोडला नाही..

बदल: D हा BM चा मध्यबिंदू घेतला तर $16AD^2=13AB^2$ असं येतं. तेव्हा तुम्ही BD, DM इत्यादींकरता x, म्हणजे, $BC = 4x$, मानलंत तर उत्तर लागलीच येतं. करूनच पहा ना.

उदा. 4: त्रि ABC च्या AD, BE आणि CF ह्या मध्यगा आहेत आणि G हा त्यांचा संपातबिंदू आहे. तर $3(GA^2+GB^2+GC^2) = (BC^2+CA^2+AB^2)$ असं दाखवा.

टीपः सर्वसाधारणतः पहिली बाजू म्हणून AB घेतली जाते. पण इथं मी



पहिली बाजू BC घेतली आहे. कारण ते चक्रीय क्रमाला धरून आहे.

तुमच्या मनात असं येईल की नसलं चक्रीय क्रमाला धरून तर काय फरक पडतो? याचं सरळ उत्तर असं आहे की गणितात काहीच फरक पडत नाही. पण आपली आकडेमोड सुकर होत असेल, अनाठायी होणारी मेहनत वाचत असेल आणि त्याच त्याच प्रकारचे राशी लिहिण्यातला आपला त्रास काही अंशी वाचत असेल तर आपण ही एक शिस्त पाळणं योग्य होईल. ह्या उदाहरणांवरून ते तुमच्या लक्षात येईलच. इंग्रजी अक्षररचनेत A,B,C हा अक्षरांचा स्वीकृत क्रम आहे. म्हणजे पहिलं अक्षर A आहे. म्हणून त्रिकोणाचा पहिला शिरोबिंदू A. त्यामुळं अर्थातच त्याच्या समोरची पहिली किंवा संगत बाजू, म्हणून BC हीच. आणि तोच क्रम अनुक्रमे D,E,F तसंच, l,m,n यांचा किंवा x,y,z यांचाही आहे. हा मुद्दा कायम लक्षात ठेवा. आणि इतर काही नावं देतानाही अशीच शिस्त पाळा. तुम्ही त्रिकोणाच्या बाजूंना a, b, c अशी नावं देता. ते बरोबरच आहे. पण a म्हणजेच BC ना?

आता, मागच्या उदाहरणात जसं अपूर्णांक टाळण्याकरता आपण त्रिकोणाच्या बाजू 6x घेतल्या. तसंच, आता बाजूंचे दोन दोन समान भाग होतात आणि मध्यगांचे तीन तीन समान भाग होतात. म्हणून बाजू a, b, c ऐवजी 2x, 2y, 2z व मध्यगा 3l, 3m, 3n अशा घेऊ. मग आपल्याला AD=3l, BE=3m, CF=3n आणि GA=2l, GB=2m, GC=2n, GD=l, GE=m, GF=n असं लिहिता येतं. (हे आधीच लिहून ठेवावं. त्यानं आपली आणि *मुख्यतः परीक्षकांचीही* सोय होते! ते तर फारच महत्त्वाचं नाही का?)

इथंही मी चक्रीय क्रम पाळला असल्यानं आकृतीकडे पाहून एकदा GA=2l असं लिहिलं तेव्हा पुढच्या कामाकरता मी चक्रीय क्रमाचा अवलंब केला. मला आकृतीकडे पहावंच लागलं नाही. आता चक्रीय क्रमाचं महत्त्व लक्षात येईल ना? हळू हळू येईल.

प्रथम आपण फक्त GBC ह्या एका त्रिकोणाकरता अपोलोनियसच्या प्रमेयाचा उपयोग करू. त्यानंतर केवळ चक्रीय क्रमाचा उपयोग करून पुढची विधानं आकृती न पहाताही सहज लिहून टाकू. अपोलोनियस प्रमेयानुसार $GB^2+GC^2=2GD^2+2BD^2$ किंवा अक्षरांचा उपयोग करून

$$4m^2+4n^2=2l^2+2x^2$$

(2 हा अवयव काढला नाही, हे लक्षात घ्या. त्याचं कारण कळेलच.) त्याचप्रमाणं, पण चक्रीय क्रमाचा उपयोग करून इतर विधानंही अशीच

आकृती न पाहता लिहिता येतील. l ऐवजी m, m ऐवजी n आणि n ऐवजी l हा चक्रीय क्रम. तसंच x,y,z करता किंवा a,b,c करता करायचं. पुढची दोन समीकरणं चटकन लिहिता आली. वेळ वाचला! चुका टळल्या!

$$4n^2+4l^2=2m^2+2y^2$$

$$4l^2+4m^2=2n^2+2z^2$$

आता ह्या तिघांची बेरीज करू. मग डावीकडे $8(l^2+m^2+n^2)$ आणि उजवीकडे $2(l^2+m^2+n^2)+2(x^2+y^2+z^2)$. काही पदांचा लोप करून योग्य प्रकारे लिहिल्यास $6(l^2+m^2+n^2)=2(x^2+y^2+z^2)$ असं येतं. GA=2l इत्यादी आणि BC=2x इत्यादी, असल्यामुळं $GA^2=4l^2$ इत्यादी आणि $BC^2=4x^2$ इत्यादी येईल. म्हणून आपण दोन्ही बाजूंना योग्य संख्येने गुणू. दोन्ही बाजूंस हा गुणक 2 हाच घेतला पाहिजे, हे सरळ आहे. भागाकार टळले! मग आपल्याला $12(l^2+m^2+n^2)=4(x^2+y^2+z^2)$ असं मिळेल. आणि यावरून

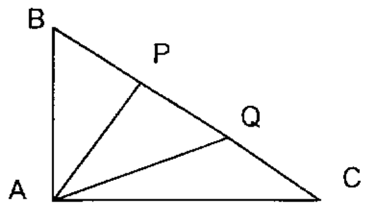
$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=(BC^2+CA^2+AB^2)$$

हे इष्ट उत्तर मिळेल. (2 का काढला नव्हता, ते कळलं?)

समजा आपल्याला हे संपूर्ण मध्यगांच्याच म्हणजे AD, BE, CF यांच्या रूपात उत्तर हवं असेल तर आपण AD=9l, BE=9m, CF=9n हा संबंध लक्षात घतला पाहिजे. त्याकरता डावीकडे 9 यायला हवेत आणि उजवीकडे 4. मग त्याकरता आपण दोन्ही बाजूंना 3x2 = 6 ने गुणू. म्हणजे आपल्याला $36(l^2+m^2+n^2)=12(x^2+y^2+z^2)$ मिळेल. मग भागाकार टाळून त्यावरून $4(AD^2+BE^2+CF^2) = 3(BC^2+CA^2+AB^2)$ हा गुणधर्म मिळेल.

टीप: आपल्या संपूर्ण विवेचनात आपण भागाकार आणि त्यामुळं अपूर्णांकही टाळले आहेत, हे लक्षात घ्या. गुणाकाराच्या तुलनेत भागाकार नेहमीच अवघड आणि क्लिष्ट असतो. दुमजली लिहावं लागतं. म्हणून शक्य तोवर भागाकार टाळणं चांगलं. आपला वेळ तर वाचतो, चुकाही कमी होतात.

उदा. 5: ABC हा एक काटकोन त्रिकोण असून A=90. P आणि Q यांमुळे



AC चे तीन सारखे भाग झाले आहेत. तर $AP^2+AQ^2 = 5PQ^2$ असं दाखवा.

सिद्धता: $BC=3x$ समजू. (असं का?) मग $AB^2+AC^2=BC^2=9x^2$ $BP=PQ=QC=x$. आता त्रि ABQ आणि त्रिकोण APC यांना अपोलोनियसचं प्रमेय लावू. त्यामुळं मग $AB^2+AQ^2=2AP^2+2x^2$, $AP^2+AC^2=2AQ^2+2x^2$ मिळेल. बेरीज करून, एकेका AP^2 व AQ^2 यांचा लोप करून $(AB^2+AC^2=BC^2=)\ 9x^2 = AP^2+AQ^2+4x^2$ मिळेल. आणि $AP^2+AQ^2=5x^2=5PQ^2$

सारांश: योग्य नावं देण्यामुळं आपलं लिखाण काम खूपच वाचतं. फक्त योग्य म्हणजे काय हे कळायला हवं. त्याकरता सराव हवा आणि विचारही हवा. मी $BC = 6x$ घेतलं नुसतं x नव्हे. पुढचं उदाहरण सोडवण्याचा प्रयत्न करा, म्हणजे माझ्या म्हणण्यातलं मर्म तुम्हाला कळून येईल.

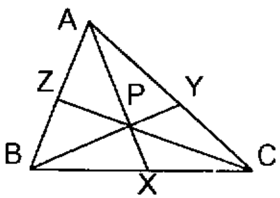
त्रिABC च्या BC बाजूचे त्रिभाजन करणारा D हा बिंदू B च्याजवळ आहे. E बिंदू AD चं त्रिभाजन करतो तो D च्या जवळ आहे. BE वाढवल्यावर AC ला F मध्ये मिळते. तर $BE : EF = 5 : 4$ दाखवा.

साक्षरभूमितीची उदाहरणं कशी लवकर सुटतात, त्रास कमी होतो, याचा अनुभव आपण घेतला. आता आणखी काही उदाहरणं पाहू.

उदा. 6: त्रि ABC मध्ये P हा एक बिंदू आहे. AP, BP, CP अनुक्रमे BC, CA, AB यांना X, Y, Z ह्या बिंदूंत छेदतात. तर दाखवा -

$$(1)\ \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YC}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1 \quad (2)\ \frac{PX}{AX}\cdot\frac{PY}{BY}\cdot\frac{PZ}{CZ}=1$$

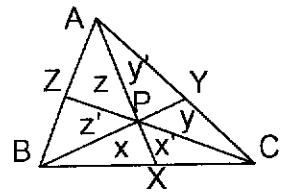
$$(3)\ \frac{AP}{AX}\cdot\frac{BP}{BY}\cdot\frac{CP}{CZ}=2$$



ह्या प्रमेयाला चेवाचा प्रमेय म्हणतात. चेवा (Ceva) हा एक ग्रीक गणिती होता. (काही जण केवा, सेवा असाही उच्चार करतात.)

अक्षरं घेतली नाहीत तर हे प्रमेय सिद्ध करताना इतका त्रास होतो की, तो तुम्ही स्वतःच अनुभवून पहावा, हे बरं.

एकाच रेषेवर ज्यांचे पाये आहेत आणि ज्यांचा शिरोबिंदू एकच आहे त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळं पायांच्या प्रमाणात असतात, हा गुणधर्म तुम्हाला माहीत आहे. त्याचप्रमाणं गुणोत्तर-प्रमाणांचेही गुणधर्म तुम्हाला माहीत आहेत, असं मी समजणार आहे.



मूळ त्रिकोणाचे एकूण सहा भाग झालेले दिसतात. त्यांना आता मी नावं देतो. वरील आकृती पहा. आणि नावं कशी घेतली आहेत तेही नीट लक्षात घ्या. अक्षरांचा नेसर्गिक क्रम तसाच राहील अशी काळजी घेतली असल्याचं दिसेल. म्हणजे A च्या समोर X इत्यादी.

पुढीलप्रमाणं मांडणी करून मग काय केलं आहे, ते समजून घ्या.

$$\frac{BX}{XC}=\frac{x+z+z'}{x'+y+y'}=\frac{x}{x'}$$

अंशाअंशाची आणि छेदाछेदांची वजाबाकी करून प्रत्येक गुणोत्तर खालच्या समीकरणाच्या उजव्या बाजूइतकं येईल. म्हणूनच

$$\frac{BX}{XC}=\frac{z+z'}{y+y'}$$

याचप्रमाणं इतर दोन गुणोत्तरं चक्रीय क्रम वापरून एकदम लिहू. मग

$$\frac{CY}{YA}=\frac{x+x'}{z+z'} \text{ आणि } \frac{AZ}{ZB}=\frac{y+y'}{x+x'}$$

ह्या तीन गुणोत्तरांचा गुणाकार केल्यावर इष्ट उत्तर मिळेल.

तुमच्या मनात असं येऊन जाईल की x', x'', y', y'' अशी ' (डॅश) युक्त अक्षरं वापरण्याऐवजी सरळ p,q,r,s,t,u ही अक्षरं घेतली असती तर जरा सोपं झालं नसतं? त्याचं उत्तर 'नसतं,' हेच आहे. कारण आकृतीचा उपयोग करून पहिलं समीकरण एकदा लिहिल्यावर पुढची दोन समीकरणं लिहिण्याकरता आपल्याला आकृतीचा आधार घ्यावाच लागला नाही, हे जास्त महत्त्वाचं आहे. चक्रीय क्रमानं, म्हणजे x च्या जागी y, y च्या z जागी x घेऊन दुसरं आणि पुन्हा z च्या जागी x घेऊन तिसरं, ही समीकरणं सहज लिहिता आली. यात आणखी एक सुधारणा केली की,

लिखाण आणखी कमी होईल. $x+x'=P$, $y+y'=Q$, $z+z'=R$ अशी नावं द्या, लिहा आणि करून पहा लिखाणकाम आणखी कमी कसं होतं ते.

चक्रीय क्रमः असं का म्हणतात? चक्र म्हणजे चाक. त्यावर A, B, C क्रमानं l, m, n किंवा x, y, z अशी अक्षरं लिहिली आणि बाणानं दाखवलेल्या दिशेनं चाक फिरवलं की अक्षरं एकमेकांच्या जागी त्या क्रमानं येतात. म्हणजे A च्या जागी B, B च्या जागी C आणि C च्या जागी पुन्हा A, ह्या क्रमानं येतात. तसंच इतर अक्षरगटांकरताही होतं. म्हणून चक्रीय क्रम. (खालची आकृती पहा.)

(२) दुसऱ्या उदाहरणाकरता फक्त दिशा दाखवून देतो. बाकीचं काम तुम्ही सहज पूर्ण करू शकाल. $PX/AX = x/(x+z+z')$

$= x'/(x'+y+y') = (x+x')/(x+x'+y+y'+z+z')$

असं मिळेल. इथं तुमच्या एक बाब लक्षात आली का, की चक्रीय क्रमामुळं छेद इतर दोन गुणोत्तरांकरताही सारखाच येईल. आणि अंश अनुक्रमे $y+y'$ आणि $z+z'$ असे येतील. आणि तिघांची बेरीज केल्यावर इष्ट उत्तर मिळेल. (इथंही P, Q, R ह्या अक्षरांचा उपयोग करा.)

तिसरं उदाहरण सांगायचीसुद्धा जरुरी नाही. नाही ना?

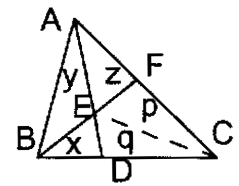
उदा. 7: आता आधी दिलेलं हे उदाहरण पहा. ABC ह्या त्रिकोणाच्या BC बाजूचे त्रिभाजन करणारा D हा बिंदू B च्या जवळ आहे. E बिंदू AD चं त्रिभाजन करतो आणि तो D च्या जवळ आहे. BE वाढवल्यावर AC ला F मध्ये मिळते. तर

$$BE : EF = 5 : 4 \text{ दाखवा.}$$

अक्षरांचा वापर केला नाही तर हे उदाहरण सोडवण्यात आपल्या सहनशक्तीची जणू परीक्षाच आहे, असं तुम्हाला जाणवेल. पण अक्षरं वापरलीत आणि मी सांगतो तशा संख्या वापरल्यात तर ते हसत हसत सुटेल.

उत्तरातील अंक लक्षात घेतल्यावर संपूर्ण त्रि ABC चं क्षेत्रफळ 9 (=5+4) घ्यावं असं मला वाटलं. त्यामुळं अपूर्णांक पुष्कळ प्रमाणात टाळणं शक्य होईल. असं का, म्हणजे कुठून आणलेत तुम्ही? असं तुमच्या मनात येईल. पण थोडा धीर धरा. तुमचं तुमच्याच लक्षात येईल.

त्रि ABC चे पाच भाग झालेले दिसतात. त्यांना, आणि अर्थातच त्यांच्या क्षेत्रफळांनाही सारखीच नावं देऊ. (चक्रीय क्रम सोयीचा नाही.)



आकृती पहा. मग, पुढचं विवेचन सहज कळून येईल. इथंही मागच्याप्रमाणंच गुणधर्म वापरला आहे. कोणता तो लक्षात येईलच.

$BD/DC = 1/3$, म्हणून $x+y = 9/3 = 3$

आणि $z+p+q = 6$. आता $ED/AD=1/3$. म्हणून $ED:AE = x/y = 1/2$, म्हणून $x = 1$, $y = 2$ $(x+y=3)$. तसंच,

$q/(z+p) = 1:3$, म्हणून $q = 2$, $z+p = 4$

$BE:EF = y/z = 2/z = (x+q)/p = 3/p = (2+3=5)/(z+p) = 5/4$

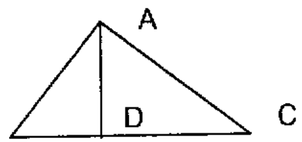
टाळले ना अपूर्णांक? आणि किती थोडक्यात सुटलं उदाहरण? याप्रमाणं, आपण आपल्या भूमितीला साक्षर (स + अक्षर) केल्यामुळं उत्तर किती लहान

झालं ते तुमच्या लक्षात आलंच असेल. भूमितीतल्या साक्षरतेचं महत्त्व पटलं?

ही आणखी दोन उदाहरणं सोडवा. संपूर्ण त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ किती घ्याल?

BD/BC=1/3, ED/AD=1/4, तर BE = EF दाखवा. आता जर आपण BD/DC =1/4 आणि ED/AD = 1/3 मानलं तर काय होतं तपासून पहा. आणि मग ह्या दोन उदाहरणांची तुलना करा.

उदा. 8: त्रिकोणावरचं हे उदाहरण घ्या. त्रि ABC मध्ये A=90. A पासून AD ही लंब. तर $1/AD^2 = 1/AC^2 + 1/AB^2$ असं दाखवा.

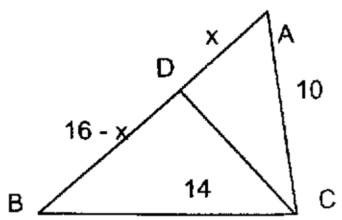


दिलेल्या ह्या उदाहरणाला आपण आधी साक्षर करू. त्यासाठी काही नावं नेहमीचीच घेऊ. BC=a, CA=b, AB=C, आणि CM=p. मग त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाची दुप्पट (का?) =bc=pa. या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचे वर्ग करू. $b^2c^2=p^2a^2$. म्हणून

$$1/p^2 = a^2/c^2b^2= (c^2+b^2)/b^2c^2 = 1/b^2 + 1/c^2$$

हे सहज लक्षात येईल. आणि रेषाखंडांना आधीची नावं द्या. कशी काय वाटली साक्षर भूमितीची शक्ती? आणखी एक बाब लक्षात घ्या. त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्रात नेहमीच एक अपूर्णांक येतो. तो टाळण्याकरता मी त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाची दुप्पट घेऊनच सुरुवात केली.

उदा. 9: आता थोडंसं बीजगणित लागणारं उदाहरण घेऊ. त्रिABC च्या बाजू BC = 14, CA = 10, AB = 16 आहेत. तर कोन A = 60 दाखवा.

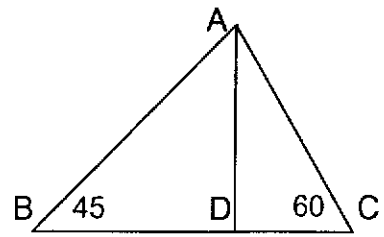


आपण C पासून AB वर CD लंब टाकू. आणि उदाहरणाला साक्षर करू. म्हणून AD = x मानू. जर आपण AC=2X=2AD दाखवू शकलो तर कोन ACD=30 आणि 30-60-90 प्रमेयानुसार कोन A=60.

आता पायथागोरसच्या गुणधर्मानुसार ADC आणि BDC ह्या दोन्ही काटकोन त्रिकोणांवरून $CD^2 = 14^2 - (16-x)^2 = 10^2 - x^2$ हे समीकरण सोडवून x=AD=5 मिळेल. ADC काटकोन त्रिकोणात कर्ण AC असून बाजू AD त्याच्या अर्धी आहे. म्हणून <BAC = 60.

ज्यांच्या आणखी एक बाब लक्षात आली असेल त्यांच्याकरता आणखी एक युक्ती. बाजूंचं निरीक्षण केल्यावर असं लक्षात येतं की, त्या सर्वांत 2 हा अवयव सामाईक आहे. तो काढून टाकला की त्रिकोण समरूपच असल्यानं नव्या त्रिकोणाचा कोन 60 दाखवला की झालं. वापरायच्या संख्या लहान होतात. आणि 14,10,16 संख्यांचे वर्ग करण्याऐवजी 7, 5, 8 यांचे वर्ग करावे लागतील. त्यामुळं आपलं काम आणखी हलकं होईल. आणि बाजू प्रमाणात असल्यामुळं दोन्ही कोन समरूप होतील. (ही रीत बोर्डात चालेल की नाही ते मात्र मला विचारू नका.)

उदा. 10: त्रि ABC मध्ये कोन B = 45, कोन C = 60. AD लंब BC. तर $2AB^2 = 3AC^2 = 4AD^2$ दाखवा.

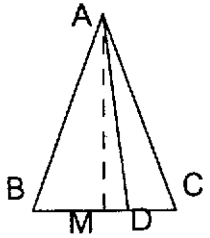


वरची आकृती पहा. दाखवल्याप्रमाणं नावं द्या. आणि DC=x माना. मग पुढील गुणधर्म सहज मिळतात. कारणं तुम्ही शोधा. AC=2x, AD=$\sqrt{3}$x, BD=AD=$\sqrt{3}$x, AB= $\sqrt{6}$x म्हणून

$$2AB^2=2.6x^2=12x^2,$$
$$3AC^2=3.4x^2=12x^2,$$
$$4AD^2=4.3x^2=12x^2$$

उदा. 11: त्रि ABC मध्ये AB=AC, D हा BC वरील कोणताही बिंदू आहे. तर $AB^2 - AD^2 = BD.DC$ दाखवा. (पुढची आकृती पहा.)

AM लंब BC काढा. मग BM=MC हे उघड आहे. आता BM=MC=y, MD=x, AM=z, अशी नावं द्या. आणि M-D-C माना. मग यावरून BD = BM + MD = y+x आणि DC = MC-MD = y-x. पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,



$AB^2 = BM^2 + AM^2$, $AD^2 = MD^2 + AM^2$
$AB^2 - AD^2 = BM^2 - MD^2 =$
$= BM^2+AM^2 - MD^2- AM^2)=y^2+z^2-x^2-z^2$
$= BM^2-MD^2=y^2+z^2-x^2-z^2=(y+x)(y-x)$
= BD.DC हे सहज लक्षात येईल.

मी इथं मजकुरातच नावं दिली आहेत. शक्य तर आकृतीतच नावं द्यावी. आणि 'आकृतीप्रमाणं नावं द्या,' असं म्हणावं. म्हणजे मजकुरात नावं देण्याचा त्रास वाचतो. आणि चुकाही कमी होतात.

शिवाय AB, AM, AD इत्यादी, ह्यांनाही नावं द्यावीत. लेखनकाम आणखी कमी होईल.

टीप: ह्या पुस्तकाचा उद्देश उदाहरणं सोडवणं किंवा सोडवून दाखवणं हा नसून अक्षरांचा उपयोग केल्यामुळं आपली समजूत कशी सोपी होते आणि त्याचबरोबर लिखाणाचं काम किती कमी होतं हे दाखवणं आहे. त्यामुळं इथं सगळ्याच पायऱ्या दिलेल्या नाहीत.

उदा. 12: एका वर्तुळावर A, X, Y, B हे चार बिंदू क्रमानं घेतले आहेत. आणि AB हा त्याचा व्यास आहे. तर

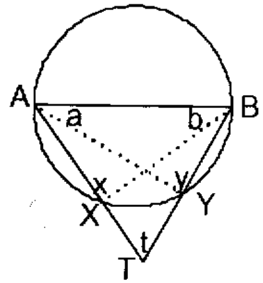
$$\angle XBA + \angle YAB = \angle ATB$$

दाखवा.

उत्तर: खालच्याप्रमाणं आकृती काढू. तिच्यात दाखवल्याप्रमाणं नावं देऊ. त्रि ATB च्या कोनांना A आणि B अशीच नावं देऊ. AB व्यास असल्यानं x=y=90. म्हणून A=90-b आणि B=90-a.
पण त्रि ATB मध्ये

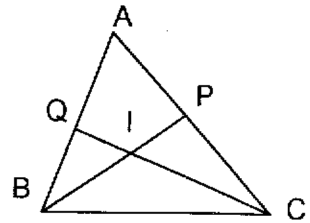
$$\angle ATB = t = 180-A-B = 180-(90-b)-(90-a) = b+a$$

म्हणून $\angle XBA + \angle YAB = a+b = t = \angle ATB$. साध्य सिद्ध.



टीप: वास्तविक ह्या शेवटच्या पायरीची गरज नाही. पण ती न लिहिली तर काही परीक्षकांना आवडत नाही. म्हणून ती लिहायची. पण अक्षरं वापरल्यामुळं, आपलं उत्तर एका अर्थानं एका ओळीतच आलंय, हे समजलं का?

उदा. 13: त्रि ABC च्या कोन B चा दुभाजक AC ला P मध्ये मिळतो. आणि कोन C चा दुभाजक AB ला Q मध्ये मिळतो. BP आणि CQ I मध्ये मिळतात. पुढील गुणधर्म सिद्ध करा.



(1) $\angle IBC + \angle ICB = 90 - \angle BAC/2$
(2) $\angle BIC = 90 + \angle BAC/2$

(3) जर APIQ चक्रीय असेल तर <BAC= 60

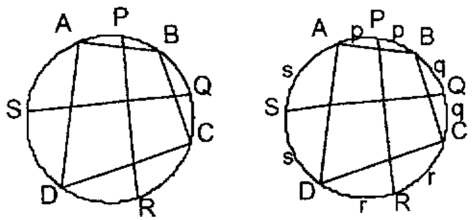
उत्तर:

(1) आपण त्रिकोणाच्या A,B,C कोनांच्या किमती 2x, 2y, 2z अशा मानू म्हणजे आपल्याला y + z = 90 - x असं दाखवावं लागेल. पण 2x+2y+2z=180 असल्यानं x+y+z=90 उत्तर आलंच की.

(2) ∠BIC = 180 - (y + z) = 90 + x म्हणून इष्ट गुणधर्म सिद्ध.

(3) तिसरा गुणधर्म आता सोपा आहे. APIQ चक्रीय असल्यानं समोरासमोरचे कोन पूरक. म्हणजेच 2x + 90 + x = 180 हे सरळ आहे. त्यावरून 3x = 90 मिळतं. म्हणून <BIC = 2x = 60 मिळेल.

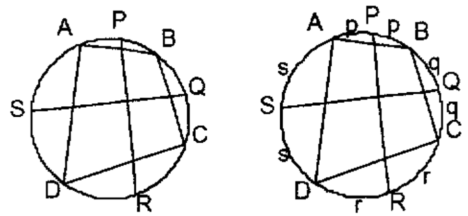
उदा. 14: खालील आकृतीत बिंदू P, Q, R, कंस AB, BC, CD, DA यांचे मध्यबिंदू आहेत. तर पुढील गुणधर्म सिद्ध करा.



(1) ∠QPR = ∠BAD/2

(2) PQS = BCD/2

(3) PR, QS ला लंब आहे.



उत्तर: आता आपण अक्षरं वापरू. P च्या बाजूच्या कंसांना (त्यांच्या मापांना) p, q,.. इत्यादी नावं देऊ. तशी नावं दुसऱ्या आकृतीत दाखवली आहेत. सर्व कंसांची बेरीज 2p+2q+2r+2s = 360. म्हणून p+q+r+s = 180

हे सहज येतं.

(1) ∠BAD = 2q+2r. म्हणून

∠QPR = कंस च्या निम्मा = QR/2 = (2q+2r)/2 = BAD/2

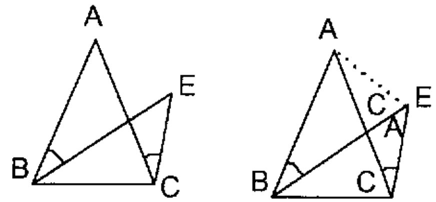
(2) हे तसंच करता येईल.

(3) ह्याच्यासाठी PS जोडा. PR, QS, ह्यांचा छेदबिंदूO समजा. (आकृतीत दाखवला नाही.)

<PSO <PSQ = (p+q)/2. <SPO = <SPR = (r+s)/2

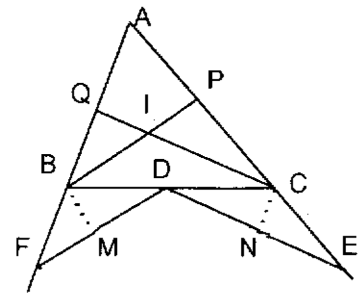
<PSO+<SPO=(p+q+r+s)/2=90

म्हणून त्रि PSO मध्ये <POS=90



उदा. 15: त्रि ABC मध्ये AB=AC असून B मधून काढलेली रेषा AC ला D मध्ये मिळते. आणि C मधून काढलेली रेषा, वाढवलेल्या BD ला E मध्ये मिळते. E बिंदू असा आहे की <ACE=<ABE.

तर <AEC=90+A/2 दाखवा.



उत्तर: A, B, C, E हे चार बिंदू एकचक्रीय ठरतात. AE जोडा. दुसरी आकृती पहा. तिच्यात दाखवलेले कोन चक्रीय गुणधर्मामुळं मिळतात. शिवाय त्रि ABC समद्विभुज (B=C) असल्याने दोन्ही बाजूंत A मिळवून

$A+B+C=180, A+2C=180, 2C+2A=180+A$ म्हणून

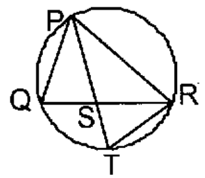
$C+A=90+A/2$ म्हणून $<AEC=C+A=90+A/2$

उदा. 16: त्रिकोण ABC चं बाह्य वर्तुळ BC ला D मध्ये, AC वाढवून तिला E मध्ये आणि AB वाढवून तिला F मध्ये स्पर्श करतं. $<EDF=90+A/2$ दाखवा. (आकृतीत वर्तुळ काढलेलं नाही. पण तुम्ही काढा.)

उत्तर: आकृतीप्रमाणं रचना. BM लंब FD, CN लंब DE

BM आणि CN हे कोनांचे बाह्य दुभाजक आहेत. BF, BD ही जोडी आणि CE, CE ही जोडी, त्या वर्तुळाला स्पर्शखंड आहेत. सर्व पाय-या दाखवल्या नाहीत. तुम्ही त्या शोधा. (सूचना: मागील धड्यात उदा 2 मधे साक्षर भूमिती वापरून $<BIC=90+A/2$ दाखवलं होतं. पुढं तिची गरज रहात नाही. आता $IB \parallel FD$ आणि $IC \parallel DE$ हे दाखवा. म्हणजे काम झालंच.)

उदा. 17: त्रि PQR एका वर्तुळात अंतर्लिखित केला आहे. कोन P चा दुभाजक QR ला S मध्ये आणि वर्तुळाला T मध्ये मिळतो. तर $<RST = \angle PRT$ दाखवा.



उत्तर: त्रिकोणाच्या कोनांची मापं p, q, r मानू. कोनदुभाजक आणि वर्तुळ यांच्या गुणधर्मांनुसार

$$QPT = RPT = p/2$$

सरळ आहे. $<RST=r+p/2$ (त्रि PRS चा बाह्य कोन).

आणि $<PRT=r+p/2$ आहेच. म्हणून साध्य सिद्ध.

(काय? पटली का राईलकरसरांची युक्ती? मग आता नेहमीच वापरणार ना असली युक्ती? -**संपादक**)

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

पुस्तिका

1.	मिश्र संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
2.	विभागणी व तिची भावंडे	– डॉ. व. ग. टिकेकर	15.00
3.	गणिती युक्तिवाद	– प्रा. य. ना. वालावलकर	15.00
4.	गणित मौज	– श्री. ना. शं. मोने	15.00
5.	कोनाचं त्रिभाजन	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
6.	संख्यानगरीत भटकंती	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
7.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
8.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	– डॉ. रवींद्र बापट	20.00
9.	ऋण संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर श्री. ना. शं. मोने	20.00
10.	भूमितीय रचना	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
11.	सममिती आणि इतर	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
12.	दिनदर्शिकेमधली जादू	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
13.	एकाच माळेचे मणी	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
14.	दोन मुलाखती	– संकलन : श्री. ना. शं. मोने	20.00
15.	गणितींचे किस्से	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
16.	निर्देशक भूमिती	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
17.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
18.	संख्यामालिका	– श्री. दिलीप गोटखिंडीकर	40.00
19.	विधान एक: सिद्धता अनेक भाग (1)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
20.	विधान एक: सिद्धता अनेक भाग (2)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
21.	कापा आणि जोडा	– प्रा. म. रा. राईलकर	30.00
22.	अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
23.	दशांश अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
24.	समीकरण	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
25.	पायथागोरसची त्रिकुटे	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
26.	गणित फुले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
27.	अपूर्णांक: आजीकडून शिका (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	40.00
28.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	50.00

सर्व पुस्तकांसाठी श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई
दूरध्वनी: (02167) 220766. मोबाईल: 9226283203. यांच्याशी संपर्क साधावा.